Как известно, в Гамильтоновой механике задачи решаются следующим образом:

Пусть у нас есть $H(q_1, q_2, p_1, p_2, t)$ – для простоты будет функция двух координат и двух импульсов.

Нам заданы q_1, q_2, p_1, p_2 в начальный момент времени.

Тогда, чтобы найти их в произвольный момент времени, нужно решить систему:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Однако если гамильтониан имеет сложный вид, аналитическое решение системы дифуров затруднительно.

Есть такой метод Гамильтона-Якоби (он будет в дальнейшем), который как раз для этого создан.

Состоит он в сути замены переменных: вместо старых переменных q_1, q_2, p_1, p_2 **q** и **p** мы вводим новые **Q** и **P**.

Мы можем задать либо новые координаты через старые:

P=P(**p**,**q**)

Q=Q(**p**,**q**)

Либо старые координаты через новые:

p=p(**P**,**Q**)

q=q(**P**,**Q**)

Пример 1. Пусть новые координаты есть сумма и разность старых координат:

P=p+q

Q=p-q

Тогда, чтобы выразить старые координаты, нужно решить систему уравнений. Получим

p=(P+Q)/2

q=(P-Q)/2.

Нам лучше выражать именно старые координаты через новые по одной причине: у нас ещё есть гамильтониан h(**p**, **q**), который надо также пересчитать через новые координаты.

Пример 2. Старый гамильтониан имел вид $h=qt+4qp+4p^2$. Мы перешли к новым координатам, согласно примеру 4. Какой он будет иметь вид теперь?
Решение. Подставляем p=(P+Q)/2, q=(P-Q)/2 в выражение для гамильтониана.
Получим $(P-Q)/2*t+4*(P+Q)/2*(P-Q)/2+4*(P+Q)^2/4=(P-Q)/2*t+(P^2-Q^2)+(P+Q)^2=$(упрощаем)$=(P-Q)/2*t+2P^2+2PQ$.
Новый гамильтониан мы будем обозначать большой буквой H: $H(P,Q)= (P-Q)/2*t+2P^2+2PQ$.

Замечание: старый и новый гамильтониан разными буквами, потому что это разные ***функции***: H(1,3) не равно h(1,3), а H(5,0) не равно h(5,0).
Однако это одна физическая величина – энергия. Это проявится позже в примере 3.

Возникает вопрос: а будет ли для новых переменных выполняться уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} Q_i = \dfrac{\partial H}{\partial P_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial H}{\partial Q_i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{Q} = \dfrac{\partial H}{\partial \overline{P}} \\ \overline{P} = \dfrac{\partial H}{\partial \overline{Q}} \end{cases}$$

Если они не выполняются, то такая замена плохая. Если выполняются – хорошая. Для хороших замен есть специальное название: ***каноническое преобразование***.

Чтобы вы это лучше запомнили, пусть это повторит Степаньянц:

Будут ли из уравнений $\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$ при замене $\begin{cases} Q_i = Q_i(q,p,t) \\ P_i = P_i(q,p,t) \end{cases}$ следовать уравнения $\begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases}$, где $K = K(Q_i, P_i, t)$ — новая функция Гамильтона? Ответ — не всегда. В общем случае при произвольных преобразованиях координат УГ не сохраняют свой вид. Однако, есть класс преобразований, который их сохраняет.

И такие преобразования называются каноническими!

Наша задача – придумать, как можно отличить каноническое преобразование от неканонического.

Например, можно проверять явно выполнение или невыполнений уравнений Гамильтона для новых переменных.
Пример 3, со звёздочкой. Доказать, что преобразование
P=**p**/C, **Q**=**q***C будет каноническим для любого гамильтониана.
Проверим это, доказав, что

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

Преобразим правую часть:

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial P_i} = \frac{\partial h}{\partial p_i} \cdot C = \dot{q}_i C$$

А это действительно $\dot{Q}_i$, ч.т.д.
Вы заметили, что на одном этапе H поменялось на h? Потому что разные функции, но одна физическая величина! Вы можете считать энергию как E(m,v)=mv^2/2, а можете как E(m,p)=p^2/(2m). Формулы разные, если вы подставите в первый аргумент 2, а во второй 1, и подсчитаете, то в первом случае вы получите 1, а во втором 1/4. Но это одна и та же физическая величина – энергия, что и позволяет нам делать такие замены.
Обсудим физический смысл данного преобразования. Это по сути смена единиц измерения. Мы измеряли расстояние в метрах, а стали в сантиметрах. Тогда C=100, все координаты выросли в 100 раз, а импульсы, напротив, в 100 раз уменьшились. Но энергия-то от этого не поменялась!

Как вы видите, проверять каноничность вот таким способ долго и сложно. Есть второй способ: вычислить скобку Пуассона {P,Q} от новых координат. Если она константа, то преобразование каноническое, а сама константа называется ***валентностью*** канонического преобразования.

Пример 8. Вася пришёл вам сдать экзамен по теоретической механике. Преобразование у него, как он сказал, вышло неканоническое, а валентность он сейчас подсчитает, только дайте ему время. Ваши действия?

Ответ: отправить Васю на пересдачу, потому что у неканонического преобразования нет валентности! Валентность есть только у канонического преобразования.

А вот вам больше примеров от Степаньянца:

$$1)\ \begin{cases} Q = pe^{q} \\ P = q + e^{-q} + \ln p \end{cases}$$

$$\{P, Q\} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{1}{p}pe^{q} - \left(1 - e^{-q}\right)e^{q} = e^{q} - e^{q} + 1 = 1 = c$$

$\Rightarrow$ преобразование каноническое с $c = 1$, результат совпадает с уже полученным.

$$2)\ \begin{cases} Q = q^{-2} + \ln(2pq^{3}) \\ P = pq^{3} + 2pq^{3}e^{\frac{1}{q^{2}}} \end{cases}$$

$$\{P, Q\} = q^{3}\left(1 + 2e^{\frac{1}{q^{2}}}\right)\left(-\frac{2}{q^{3}} + \frac{3}{q}\right) - \left[3q^{2}p(1 + 2e^{\frac{1}{q^{2}}}) + 2pq^{3}e^{\frac{1}{q^{2}}}\left(-\frac{2}{q^{3}}\right)\right]\frac{1}{p} =$$

$$= -2 + 3q^{2} - 4e^{\frac{1}{q^{2}}} + 6q^{2}e^{\frac{1}{q^{2}}} - 3q^{2} - 6e^{\frac{1}{q^{2}}}q^{2} + 4e^{\frac{1}{q^{2}}} = -2 = c$$

$\Rightarrow$ преобразование каноническое с $c = -2$, результат совпадает с уже полученным. Рассмотрим два примера.

3) Задано преобразование $\begin{cases} P = -p \operatorname{ctg} q \\ Q = 2\ln(\cos q) \end{cases}$. Выяснить, является ли оно каноническим. В случае положительного ответа найти его валентность

$$\{P, Q\} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = -\operatorname{ctg} q \frac{2}{\cos q}(-\sin q) = +2 = c$$

$\Rightarrow$ преобразование каноническое с $c = 2$.

Есть и третий способ, через производящую функцию. Точнее даже сказать, что у этого способа есть две вариации ☺

Вот первая вариация:

$$\left(\sum_i P_i dQ_i - H\,dt\right) = c\left(\sum_i p_i dq_i - h\,dt\right) - dF,$$

Т.е.

$$dF = c\left(\sum_i p_i dq_i - h\,dt\right) - \left(\sum_i P_i dQ_i - H\,dt\right)$$

Если удастся подобрать c такое, что эта штука будет полным дифференциалом, то F объявляется производящей функцией, c – валентностью, а преобразование попутно будет каноническим.
Тем самым, у нас два определения для валентности: вот это и как скобка Пуассона {**P**,**Q**}.
Но так делать неудобно, поэтому вот вам вторая вариация способа через производящую функцию:
Преобразование канонично, если удалось подобрать такую функцию F(q,Q,t), такую, что

$$\begin{cases} cp_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ K = cH + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

Если что, у Степаньянца H – это старый гамильтониан, а K – новый.

В последующих двух примерах, которые сейчас здесь будут, Степаньянц показывает, что преобразования канонические, простой проверкой уравнений Гамильтона в новых координатах (это первый из трёх способов проверки каноничности), после чего считает производящую функцию. Для чего? Потому что у него в билете написано «укажите для такого преобразования производящую функцию», а он хочет отл, поэтому считает. Да, в теормехе можно обойтись без производящей функции. Но это говно запросто вам может попасться на экзе, так что считаем и не ноем.
Я выше писал такую систему:

$$\begin{cases} cp_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ K = cH + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

Но если вы уже доказали каким-то способом, что преобразование каноническое и вам осталось только подсчитать производящую функцию, то выполнение последнего равенства проверять необязательно, оно будет

выполняться автоматически благодаря каноничности, которую вы, напомню, уже доказали.
Итак, примеры от Степаньянца.

$$1)\ \begin{cases} Q_i = p_i \\ P_i = -q_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\dot{P}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} \\ \dot{Q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \end{cases} \Rightarrow \text{преобразование каноническое, } K = \mathcal{H}$$

Ай молодец Костян, доказал, что преобразование каноническое. А теперь надо найти производящую функцию, написав вон ту систему с тремя частными производными:

$$cQ_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \rightarrow F_1 = \sum_k c q_k Q_k + f_1(Q, t)$$
$$q_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \rightarrow F_1 = \sum_k q_k Q_k + f_2(q, t)$$

У всех этих $2s$ уравнений имеется единственное решение (функция F_1) при $c = 1$:

$$F_1 = \sum_k q_k Q_k + \text{ произвольная функция времени}$$

Однако, если произвольной функции времени не будет, то из третьего уравнения системы $(*)$ будет следовать $K = \mathcal{H}$, что мы и получили при явной подстановке. Даже если ее и оставить, то она не будет влиять на вид УГ, потому что в них стоят частные производные по координатам.

Видите, что Степаньянц выписал только два уравнения из трёх той системы? Потому что третье выполнено автоматически благодаря уже доказанной нами каноничности.